MA224 – Resolução de Problemas Matemáticos

Funções de 1º e 2º grau

Grupo 3

Apresentação Felipe Ferreira

25 de Agosto de 2015

Problema 1 – proposto pelo professor

Sejam f a função de 2º grau $f(x) = x^2 - 6x + 8$ e g a função de 1º grau $g(t) = at + b$, dependente dos parametros (coeficientes) a e b (numeros reais). Mostre que se $f(g(t)) > 0$ para todo t Ɛ R então $a = 0$ e $b < 2$ ou $b > 4$.

Resolução 1

$$f(g(t)) = (at + b)^2 - 6(at + b) + 8$$

Desenvolvendo, temos:

$$f(g(t)) = a^2t^2 + (2ab - 6a)t + b^2 - 6b + 8$$

Supondo que $f(g(t))$ seja uma função do 2º grau, i.e. supondo que $a \neq 0$ temos aí uma função do 2º grau (na variável t) cujo discriminant é:

$$\Delta = (2ab - 6a)^2 - 4a^2(b^2 - 6b + 8) = 4a^2,$$

estritamente maior que zero, logo possui raizes reais, e, portanto existe $t \epsilon R$ tal que $f(g(t)) = 0$. Então, para que $f(g(t)) > 0$ para todo $t \epsilon R$, devemos ter necessariamente $a = 0$. Sendo que $a = 0$, ficamos com:

$$f(g(t)) = b^2 - 6b + 8$$

Uma função constante em relação a variável t. Temos um novo polinomio do 2º grau, cujo discriminante é

$$\Delta = 36 - 32 = 4$$

logo suas raízes são

$$b = 2 \; e \; b = 4$$

Como $f(g(t)) > 0$, temos que $b < 2$ ou $b > 4$

Resolução 2

Encontrando as raízes da $f(x) = x^2 - 6x + 8$ temos: $\Delta = 36 - 32 = 4$. As raizes então serão $x = \frac{(6 \pm 2)}{2}$ $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$.
E como $f(x)$ é uma parabola côncava, pois $a > 0$, temos que $g(t)$ necessariamente não pode assumir valores entre as raízes da f.

Mas como $g(t) = at + b$, se para todo $t \epsilon R$ $a \neq 0$ teremos que $Dom(f(t)) = R$ portanto, $\exists$ $t \epsilon R$ tal que $2 \leq g(t) \leq 4$. Logo, para que $f(g(t)) > 0$, a tem que ser 0.

O que resulta em $g(t) = 0t + b = b$ então $f(g(t)) = f(b) = b^2 - 6x + 8$.

Sendo assim temos que $b < 2$ ou $b > 4$.

Problema 2 – com duas resoluções

O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, chamada de *bandeirada*, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$3,44 e cada quilômetro rodado custa R$0,86, calcule:

a) o preço de uma corrida de 10 km.

b) a distância percorrida por um passageiro que pagou R$21,50 pela corrida.

Resolução 1 (nível do Ensino Fundamental II)

a) Sabemos que, em uma corrida, sempre pagaremos R$3,44, independentemente de quantos quilômetros rodarmos. Além destes R$3,44, pagamos R$0,86 por quilômetro rodado. Então, se construirmos uma pequena tabela (como a da figura abaixo):

Quilômetro rodado	Preço do quilômetro rodado (R$)
1	**0,86**
2	**1,72**
3	**2,58**
4	**3,44**

Podemos perceber que, a cada quilômetro rodado, sempre somamos 0,86 reais ao valor da corrida, isto é:

- ➔ Para 1km rodado, pagamos $0{,}86$ reais
- ➔ Para 2km rodados, pagamos $0{,}86 + 0{,}86 = 1{,}72$ reais
- ➔ Para 3km rodados, pagamos $0{,}86 + 0{,}86 + 0{,}86 = 2{,}58$ reais
- ➔ Para 4km rodados, pagamos $0{,}86 + 0{,}86 + 0{,}86 + 0{,}86 = 3{,}44$ reais

  E assim por diante.

Portanto, em uma corrida de 10km, iremos somar R$0,86 ao preço da corrida **dez** vezes, isto é, pagaremos $10 \cdot 0{,}86 = 8{,}60$ reais pelos quilômetros rodados.

Mas, devemos lembrar que o taxista cobra a *bandeirada* em **toda** corrida. Portanto, o preço da corrida de 10km é calculado por:

$$3{,}44 + 8{,}60 = 12{,}04$$

Portanto, o preço da corrida foi de R$12,04.

b) Se sabemos que o passageiro pagou R$21,50 pela corrida, então já podemos concluir que R$3,44 desse valor equivale à *bandeirada*, pois é um valor fixo cobrado em **toda** corrida, e os R$18,06 que restantes são dos quilômetros rodados. Então, precisamos ver quantas taxas de

R$0,86 “cabem” no valor total pago apenas pelos quilômetros rodados, e para isso, basta calcular

$$18{,}06 : 0{,}86 = 21$$

Sendo assim, a distância percorrida foi de 21 quilômetros.

Resolução 2 (nível do Ensino Médio)

a) Sabemos do enunciado que em toda corrida é cobrada a *bandeirada*, preço fixo de R$3,44, e mais R$0,86 por quilômetro rodado. Então, se n é o número de quilômetros rodados e $P(n)$ o preço pago pela corrida, podemos modelar a situação através de uma função afim $P(n) = 0{,}86n + 3{,}44$. Então, calcular o preço de uma corrida de 10km nada mais é do que calcular $P(10)$. Portanto:

$$P(10) = 0{,}86 \cdot 10 + 3{,}44 \Rightarrow P(10) = 12{,}04$$

Então, o preço da corrida foi de R$12,04.

b) Uma vez que sabemos que o passageiro pagou R$21,50 pela corrida, que já foi modelada através da função $P(n) = 0{,}86n + 3{,}44$, onde $P(n)$ representa o preço pago pela corrida e n o número de quilômetros rodados, então, calcular o que se pede é equivalente a resolver a equação $P(n) = 21{,}50$. Então:

$$P(n) = 21{,}50 \Leftrightarrow 0{,}86n + 3{,}44 = 21{,}50 \Rightarrow 0{,}86n = 18{,}06 \Rightarrow n = 21$$

Sendo assim, a distância percorrida foi de 21 quilômetros.

Problema 3

Considere dois tanques idênticos completamente cheios de água. Se retirarmos 6500 litros de um deles e 11450 litros do outro, o primeiro fica com o triplo da quantidade do outro. Qual é a capacidade de armazenamento de cada tanque?

Resolução

Retiramos 6500 litros do primeiro tanque:

$$x - 6500$$

Como os dois tanques inicialmente o mesmo volume de água, a retirada de 11450 litros do segundo tanque representa:

$$x - 11450$$

Após a retirada de água dos dois tanques, o segundo possui o triplo do volume do primeiro, logo:

$$x - 6500 = 3(x - 11450)$$

Realizar a distributiva no lado direito da equação

$$x - 6500 = 3x - 34350$$

Isolar em um dos membros os valores que dependem da incógnita

$$x - 3x = -34350 + 6500$$

Resolver as subtrações em ambos os membros

$$-2x = -27850$$

Dividir ambos os lados da equação por – $\mathbf{2}$

$$x = \frac{27850}{2}$$

Indicar a solução correta

$$x = 13925$$

Portanto a capacidade de armazenamento dos tanques é 13925 litros.

Problema 4

Considere a família de funções quadráticas da forma $f(x) = x^2 + 3ax + b$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}$, com a e $b \in \mathbb{R}$. Mostre que quando $a + b = 2$ os gráficos destas funções apresentam um ponto em comum e encontre as coordenadas deste ponto.

Resolução

Sabemos que os parâmetros a e b respeitam a seguinte relação:

$$a + b = 2 \ \rightarrow b = 2 - a$$

Sendo assim, podemos substituir o parâmetro b na função:

$$f(x) = x^2 + 3ax + b$$

$$f(x) = x^2 + 3ax + 2 - a$$

Colocando a em evidência, obtemos:

$$f(x) = x^2 + 3ax + 2 - a$$

$$f(x) = x^2 + a(3x - 1) + 2$$

Como queremos que a coordenada do ponto seja independente do valor de a, teremos:

$$(3x - 1) = 0 \ \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Então, no ponto $x = \frac{1}{3}$ a função independe do valor de a, sendo assim:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + a\left(3\frac{1}{3} - 1\right) + 2$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + 2 = \frac{19}{9}$$

Então todas as funções na forma $f(x) = x^2 + 3ax + b$, com $a + b = 2$ possuem o ponto $\left(\frac{1}{3}, \frac{19}{9}\right)$ em comum.

Problema 5

A razão entre os candidatos que prestam "Vestibulinho" para ingresso em uma escola técnica foi de uma moça para três rapazes. Se o número total de candidatos foi 160, e somente $\frac{1}{5}$ das moças passaram. Qual foi o número de moças que passaram no "vestibulinho" ?

Resolução

Seja y a quantidade de rapazes e x a quantidade de moças, temos que a razão de moças por rapazes é igual a um terço:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

Outra importante informação é que o número total de candidatos é 160, ou seja, a quantidade de rapazes mais a quantidade de moças é 160:

$$x + y = 160$$

Tem-se, dessa forma, um sistema de equações do 1º grau:

$$(i)\ \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$
$$(ii) x + y = 160$$

Para resolver (i), multiplicamos ambos os lados da igualdade de (i) por y e por 3:

$$(i)\ \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$
$$\frac{x \cdot 3 \cdot y}{\mathrm{y}} = \frac{y \cdot 3 \cdot 1}{3} \Rightarrow$$
$$y = 3 \cdot x$$

Substitui na equação (ii) o valor de y em função de x:

$$(ii) x + y = 160 \Rightarrow$$
$$x + 3x = 160 \Rightarrow$$
$$4x = 160 \Rightarrow$$
$$x = \frac{160}{4}$$
$$x = 40\, moças$$

Assim, obtemos a quantidade de moças que prestaram o vestibulinho, mas a pergunta é: Quantas moças passaram no "Vestibulinho"? Como foi $\frac{1}{5}$ das moças que passaram, temos:

$$\frac{1}{5} \cdot 40 = \frac{40}{5} = 8 \text{ moças que passaram}$$

O total de moças que passaram no "Vestibulinho" foram 8 moças.